

上越数学教育研究，第32号，上越教育大学数学教室，2017年，pp.105-118

教授学的転置の 25 年

マリアンナ・ボスク (Marianna Bosch)* ジュゼップ・ガスコン (Josep Gascón)**

*ラモン・リュイ大学 (Universitat Ramon Llull)

**バルセロナ自治大学 (Universitat Autònoma Barcelona)

大滝孝治（北海道教育大学）・宮川健（上越教育大学）訳

本稿は次の論文の全訳である。

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-65.

小説で一番たいせつなのは、誰が現実を思い描き、そして誰がそれを他者に与えるのか、といった視点を解決することである。

M. B. モンタルバン

2005 年 10 月，教授人間学理論について研究していたり，この理論の発展に関心をもっていたりする研究者のグループが，中世の町並みを残す南スペインの町バエサで開かれた会議に集まった．参加者らは，「数学教授学 (didactics of mathematics)」と呼ばれる数学教育における新しいパラダイムに「教授学的転置 (didactic transposition)」という語が導入されて以来，25 年間にわたって進められてきた研究を共有し確認した．われわれはいま，研究領域としての数学教育の進展において，教授学転置理論が主に貢献したと理解される 3 点を紹介するための，十分な全体像を把握している．

目次

1. 「教授学的転置」理論の普及
2. 「数学教授学」領域内の教授学的転置
3. 貢献 1：実証的な分析単位の拡大

4. 貢献 2：数学的活動と教授活動の記述

5. 貢献 3：様々な決定水準における制約

1. 「教授学的転置」理論の普及

しばしばアイデアの時間というのは，人々の時間よりもずいぶんとゆっくりと流れていく．25 年ほど前，シャンルースにおける「第 1 回数学教授学夏期講習会」の際に（フランス，1980 年 7 月 7-19 日），イブ・シュバラールは教授学的転置についての最初の講義を行なった．1970 年代に教授学的状況理論 (Brousseau, 1997a) とともギ・ブルソーが築いた新しいパラダイムの初期段階にあった．

教授学的転置という概念は，このパラダイムに最初の形を与えた次のような概念の集まりに急速に統合されていった．教授システム，教授学的状況・亜教授学的状況，教授学的契約，概念スキーム，道具・対象の往還，教授工学などである．教授学的転置の概念とともに，数学教育学が研究しようと企てる社会的現実の新しい「シーン」を名付ける—すなわち生み出す—他の新しい用語が現れてきた．知識の総体 (body)，「ノースフェール」（あるいは教育について考える人々の領域），プロト数学的知識とパラ数学的知識，そして，方法的なものでは，絶え間ない「認識論的警戒」によって研究者が克服しなければならない教育的現実の「自明性の錯覚」である．

ときとともに，「教授学的転置理論」と呼ば

れ始めていたものが、国や言語コミュニティ、研究者グループの科学的あるいは文化的な親和性に依りながら、多種多様な方法で広まり始めた。『教授学的転置：学問知から教育知へ』（Chevallard, 1985a）の第1版は、フランス語圏コミュニティに影響を与えた。それは、少なくともフランス語圏コミュニティにおいては、新たな研究領域を開拓しているようであった数学教授学や実験科学における数多くの研究に引き継がれていった。ジルベール・アルザックは、教授学的転置の出発地点から1990年代までの変遷を正確に描写している（Arsac, 1992）。

スペイン語圏コミュニティにおいては、すぐにディルマ・フレゴナの手による「灰色」の訳本が現れた。数年後、アルゼンチンの出版社 Aique が第2の訳本を出し、この本の登場によって転置理論は数学教育領域の外にまで広く普及することになる。言語、実験科学、哲学、体育、テクノロジー、社会科学、音楽、なんとチェスまで！ 国際的な英語圏コミュニティにおける普及は、ジェレミー・キルパトリックのような著名な研究者がすぐにこの新しいアプローチを実践に移す方法に精通したのにもかかわらず（例えば、ワン・カンの学位論文、Kang (1990), Kang & Kilpatrick (1992) においてのように）、ずっと遅かった。彼の後に続くものはほとんどいなかった。Google で少し調べてみると、フランス語表記 ‘transposition didactique’ が 27000 件以上、スペイン語表記 ‘transposición didáctica’ が 11000 件以上ヒットする一方、英語表記では 500 件に満たない（‘didactic transposition’ と ‘didactical transposition’ の両方を含めて）。

教授学的転置は何から構成されるのか、そしてその理論はどのような新しい要素を数学教育研究へ与えるのだろうか。特筆すべきことは、学校で教えられているもの（「内容」あるいは「知識」）が、ある意味で外因性を有する産物、すなわち教育や普及に関する社会の

ニーズによって学校にもちこまれた—「転置された」—学校外で生み出されたものである、ということを考察する必要性を指摘したことである。このため、学校で教えられているものは、学校が与える新しい環境の中で「生きる」ことができるように一連の適応のための変換を通過する必要がある。学校で教えられるべきいくつかの知識については、学校のためにつくられたわけではないものを学校の中で再構築されるものへと変容させるために、転置作業 (transpositive work) が施される必要があるのである。

教授学的転置の過程は、伝達されなければならない知識の総体の選択という、学校から遠く離れた場所から始まる。それから、単なる「移転」や適合、単純化ではない、明らかに創造的な作業、つまり知識の様々な要素を解体し再構成する過程が続く。この作業はその知識の力や機能的特徴を保ちながらそれを「指導可能」にするというねらいを伴う。転置作業は、政治家、数学者（「学者」）、指導システムのメンバー（特に教師）を含む多くの仲介者（ノースフェール）によって、そしていつでも容易には見極められない歴史的条件や制度的条件の下で行なわれる。それは指導を可能にするが、学校でできることやできないことに多くの制限を課す。転置の過程の後に、学校は教えられるべき知識の存在理由、すなわちこの知識の創造の動機付けとなった問いを失うことがよく生じる。例えば、なぜ三角形はそんなに重要なのか、関数の極限は何のためにつくられたのか、なぜわれわれは多項式を必要とするのか。ここに、Chevallard (2004) が「記念碑主義的 (monumentalistic)」な教育と呼ぶものがみられる。記念碑主義的な教育では、生徒は、時間とともにその存在理由が消滅してしまった知識の総体について思いを巡らすことを求められるのである。

25 年前、数学教育の研究は学習の心理学的見地に非常に影響を受けていた。転置過程の

存在を明らかにすることは、生徒によって進められる数学的活動を越えて、そして教室の中で教師によって行なわれる取り組みを越えて研究領域を切り開くことを意味した。教授学的転置を考慮に入れることは、さらに転置過程の具体的な道筋、それを制限する制約の種類、ある特定の転置が行なわれて他の転置が行なわれない理由を説明するメカニズムを問うことをも意味した。要するに、教育にかかわる制度^{訳注1}に伴う制約を検討することは、数学を指導し研究し学習する際に教師と生徒が行なっていることを、より包括的な仕方の説明する手助けとなる。その意味で、教授学的転置理論は、それまで名前もなく、したがって考察もされてこなかった教育的現実の一つの側面を生じさせることにより、数学教育研究の研究対象の拡大に寄与した。

しかしそれだけではなかった。以下でみていくように、考察される実証的な現実の拡大に伴い、数学教育の問題を定式化しそれに取り組むための新たな方法が出現した。それが、「人間学的アプローチ」や「教授人間学理論」と呼ばれるものである (Chevallard, 1992, 1999; Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)。したがって、この新しいアプローチの萌芽と今日みなされる教授学的転置の概念が、数学教育研究者の取り組みを通して、異なったペースで様々な方法で広まってきたことは驚くべきことではない。転置現象を追うその取り組みは、今度は学問としての数学教授学それ自体に影響を与える。一部の者にとって数学教育における「古典的な用語」とみえるもの、すなわちいつもそばにあったものは、そのコミュニティの他のメンバーにとっては、現在であつても発見すべき概念でありうるのである。

2. 「数学教授学」領域内の教授学的転置

教授学的転置理論の意味や適切性は、それに価値を与えるもともとプロジェクトからはじめない限り理解されえない。それは、教

授学的状況理論 (TDS)とともにギ・ブルソーによって開始された数学教育研究の新しいプログラムである。実際、TDSは、数学の指導と学習にかかわる問題を研究する方法に劇的な変化をもたらした。この革命は、学習と指導の過程を研究するために用いられる概念においてのみならず、教育の現実を問う特殊な方法においても変化をもたらした。TDSは、問題を変え、用いられるモデルを変え、そして教育にかかわる制度において暗黙裡に前提とされている数学的知識を問うというところから始める方法論を通して、研究されるべきシステムを変えたのである。数学的知識を問うとは、幾何とは何か、統計とは何か、小数とは何か、数え上げとは何か、代数とは何か、などといったことである。そしてTDSは、数学的概念を特定すると同時に教室の中でそれを構成する方法として用いられる、数学的知識の固有認識論モデル—状況や「ミリューとのゲーム」—を提案する。これに関してブルソーは次のように述べている。

《状況は、その中で人が自分自身や、自分とミリューをつなぐ関係をみつけるような環境の集合である。したがって、知識の総体の普及や学習を統括する環境を研究対象に据えるということは、それらの状況を研究することにわれわれを導く。》
(Brousseau, 1997b, p. 2)

《状況は、ある決められた影響をミリューに及ぼすために主体がミリューとの間につくりあげる固有の関係の中に、そうした知識がどのように介入してくるかを「説明する」最小のモデルである。》(Brousseau, 2000, p. 2)

《数学教授学において、これらの「モデル」は、教授現象の分析と説明の一貫性を示すための手段として、つまり研究の道具として基本的に使用される。たとえ教授工学を

構築するために使用されるときでさえ、それらは、再生産すべき「事例」としても、教師の判断を導びいたり、未来の教師を養成したりするために直接的に使用されるべき原理としても、決して提示されてこなかった。対照的に、社会／教師／子どものシステムの複雑性と、これらのモデルの有効範囲やメタファーの誤用を無視した即席の拡大適用の危険性を「[それらは示している]」。》(Brousseau, 2005, p. 56)

社会的な制度における数学の生成と普及の過程における意図されざる規則性として現れ、対応する認知現象や社会現象、言語現象には還元されえない、教授現象の存在を最初に仮定したのは、ブルソーである。このことは、数学の「指導」と「学習」が検討される認識論モデルの基本用語によって定義されうるため、それらはもはや一次的な研究対象ではなく二次的な対象になる（重要でないということの意味しているのではない！）、ということをも意味する。指導と学習の研究と改善のために、一般に受け入れられている自生的な（spontaneous）認識論モデルに疑問を感じ^{訳注2}、われわれ自身のモデルを作り上げる必要性が「認識論的プログラム」(Gascón, 2003)と名付けられたものの出現を求める。¹

「認識論的探究」を実行する必要性を強調することにより、教授学的転置理論は TDS の計画をよりはっきりとしたものにした。その計画は、既に明確で最良の指導法が存在する一つしかない数学的知識、という幻想を打ち

砕くことに貢献するものである。知識の総体は、いくつかの特殊なニーズへの回答として学校外で構成され、いくつかのかなり固有な条件に応じて定式化される。複数の当事者と異なった時間性を伴う社会的構成の過程が存在し、これを通して知識の総体のいくつかが教室に届くまでに選択され、限定され、再組織され、よって再定義されるのである。この過程の研究は、教室でなされていることの理解へ向けた重要なステップである。それは、たとえ指導行為自体がこの過程（つまりこれら全ての再定義という現実）の存在を否定し、指導を社会的に正当なものとする知識が一つしかないという幻想を保たなければならないとしてもである。

《教授学者 (didactician) にとって、[教授学的転置の概念] は、一歩下がり、証拠を疑い、単純な考えを取り除き、研究対象との油断ならない親密さを免れることを可能にするツールである。それは、教授学が独自の領域として自身を確立するために行なわなければならない切断の道具の一つである。教授学の問題の中へ「知識を通して入ること」が可能態から現実態に移行するのはこのためである。なぜならば、「知識」はこれを通して問題性 (problematic) をもち、今後、問題（新しいものや再定式化されたもの）の定式化とそれらの解決における用語として現れうるからである。》(Chevallard, 1985a, p. 15)

TDS によって提唱された教授学という一科学のプロジェクトの大胆さは、このように、その実証的な分析単位が大幅に拡張され始めたそのときに、より強められた。数学は社会的な制度の中で生成され、指導され、学習され、実践され、普及されるため、どの数学が学校で扱われるのかを理解するためには、その指導を動機付け正当化する数学を知ることに加え、この数学が様々な指導の制度におい

¹ この表現は、後に「数学教授学」として洗礼を受けるものを、ブルソーが当初「実験的認識論」と呼んでいたという事実からきている。それは、知識を問うことの重要性を強調し、地理や言語に言及するような他のより専有的な命名を避けている（認識論的プログラムのすべての研究がフランスでなされているわけではないし、すべてのフランス教授学がそこに入るわけでもない）。

ていかに解釈されているのかをも知る必要がある。

3. 貢献 1：実証的な分析単位の拡大

教授学的転置理論の第 1 の貢献の一つは、数学の学校的再構成に関連する現象を考慮することなしには学校数学を適切に解釈することができず、学校的再構成の起源が数学的知識を生み出す制度の中にあることを明確にしたことである。ここで一つの区別が導入される。それは、数学者などの生産者によって生み出される「もともとの」あるいは「学術的な」数学的知識、カリキュラムによって公式に設計される「教えられるべき」数学的知識、教室において教師によって実際に教えられた数学的知識、生徒によって実際に学ばれ、教授過程の終着地点であり新たな出発地点とも考えられうる数学的知識である。図 1 は教授学的転置過程の各ステップを描写している。

教授学的転置過程は、知識の制度的な相対性を強調し、教授学的問題を制度のレベルに、つまり考察対象の制度に属する個人の特徴を越えたところに位置付ける。その主たる帰結は、どんな教授学的問題においても最小の分析のまとまりが教授学的転置過程のすべてのステップを含まなければならない、ということである。これらの制度各々から得られるデータを実証的基盤として取り扱うことが重要となる。

最初のステップは、ノースフェールの生産を通した「教えられるべき知識」を指定する「指導テキスト」（公式プログラム、教科書、教師への推奨、教材など）の形成の研究に対応し、「教えられるべき知識」が構成され、ゆくゆく変化する（あるいはそのままにされる）ための条件と制約を浮き彫りにする。したが

って、指導する領域の教授学的転置（領域それ自体の画定と選定を含む）の分析は、数学教科書の検討には還元されえない。それは、たとえ数学教科書が研究者にとって特別な実証の材料であるとしてもである。重要なのは問われる問いの種類であり（なぜこれを教えるのか、なぜこの構成においてなのか、それはどこから来たのか）、教科書が示す（あるいは隠す）現象の種類である。

「学術」という語は、指導過程を保証し社会的に正当なものとする知識を特徴付けるために—かなり皮肉に—用いられている。Kang & Kilpatrick (1992, p. 2) は次のように述べている。《学術的な知識の総体は、新しい知識を生み出したり、新しく生み出された知識を一貫した理論的な集まりへと組織化したりするために使用される知識以上の何物でもない》。

「学術的知識」という表現の受け入れ難さは、教えられるべき知識（スタンダードや公式プログラムによって提供されているもの）や実際に学校で教えられた知識と同じレベルでそれを考える難しさを示している。どのような知識の総体が選ばれるのか、それらはどのように名付けられるのか、なぜそれらなのか、なぜこの種の構成なのか、それらの選択の理由は何か、など。「教えられるべき知識」や「教えられた知識」を研究するだけではもはや十分ではない。教育にかかわる制度において自明のものと思われている「学術的知識」の自生的モデルを分析する—細かく検討し分解する—ことも必要となる。このため、「学術的知識」はどんな場合においても、「基本知識 (reference knowledge)」（Astolfi & Develay (1989) によって呼ばれたような）にはなりえない。それは確かに教育にかかわる制度の基準点ではあるが、研究対象としてそれらの制

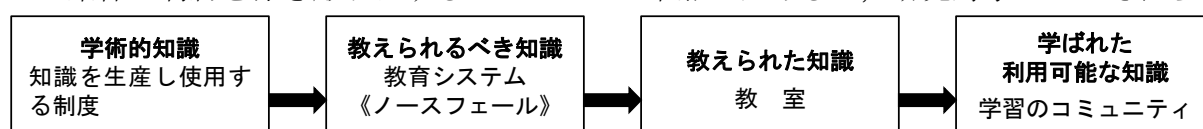


図 1. 教授学的転置過程

度を考察する研究者の基準点ではないのである。

ここで、教室での取り組みの際に教師や生徒に委ねられる自由度を制限するような転置過程の他のステップに言及することはしない。それらのステップは指導過程が通常位置付けられている場所に対応するため、これまでたくさん研究されてきた。強調したいのは、転置過程を新しい研究対象とみなすことは、われわれが属する教育にかかわる制度によって暗黙裡に押しつけられている自生的な認識論的モデルからの数学教育研究者の開放を可能にする、ということである。学術的数学から教え学ばれる数学へのすべてのステップを含むこの新しい実証的対象をみる際に、対応する数学的知識の総体の、われわれ自身の「基本」モデルを作り上げる必要がある。したがって、図1は「基本認識論知識」(Bosch & Gasón, 2005) と呼ばれるものによって補完されうる (図2)。この知識は、研究者のための基礎的な理論的モデルを構成し、数学コミュニティ、教育システム、教室という3つの対応する制度についての実証的データから作り上げられるのである。

教授学における研究は、観察される様々な制度、特に「有力な」制度に支配されることを避けられるように、それ自身の基本モデルを入念に作り上げる必要がある。教授学的転置過程の各ステップの様々な知識の総体を分析するために特権的に参照されるシステムは

存在しない。基本モデルは、研究コミュニティによって絶え間なく発展させられ、事実により検証され続ける必要がある。これが教授学における「認識論的分析」に込められる意味である。

《「学術的知識」が転置過程にふさわしい場所をあてがわれると、教授学的転置の分析が厳密な意味での認識論的分析と不当に置き換わるどころか、まさに教授学的転置の概念が、認識論的分析を教授学的分析に繋げ、そしてそれ以後は教授学における認識論の適切な利用の案内役となりうる、ということが判明する。》(Chevallard, 1985a, p. 20)

検討される教授学的問題が何であれ、研究はそこに含まれる数学的実践について特定の「視点」を採用する必要がある。例えば、学部レベルで教えられる「関数の極限」は何か、あるいは、どのような「証明」や「問題解決」を考えているのか、それは「学術的数学」の中に存在するものなのか、どのような方法で、それは教えられるべき知識として存在しているのか、いつからか、どのようなことばで、どのような制限が教師の実践に課されているのか、生徒の実践についてはどうか、などである。この視点からすれば、TDS は基本認識論モデルを生み出す「機械」である。状況は、教室の中に数学的知識を植え付け(教授工学)、学ばれ教えられた知識に関連する現象を分析

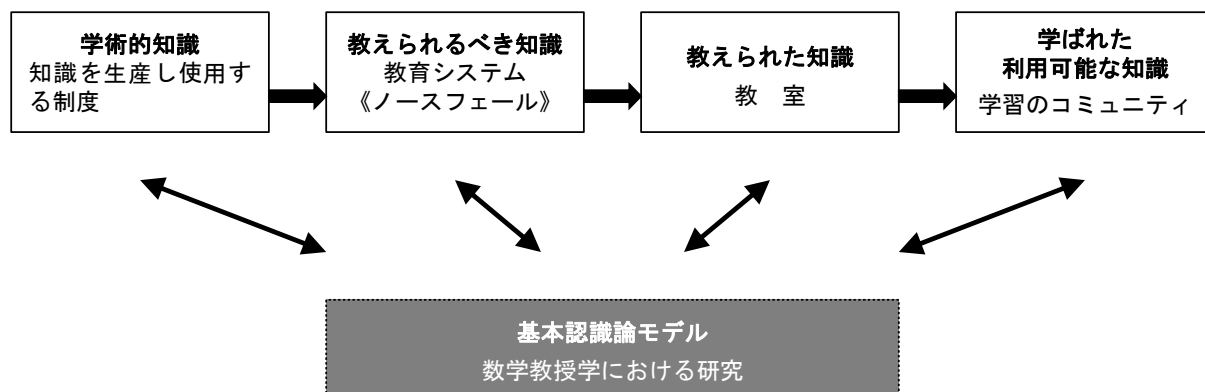


図2. 研究者の「外的」立場

するためのツールと古くから考えられてきた。しかしそれらは、例えばブルソーの十進数指導についての予備的研究 (Brousseau, 1980) におけるように、学術的知識を記述し、教えられるべき知識の変化を記述するための道具としての適切さをも示してきた。

25 年の間に、「教えられるべき数学」のいくつかの主要な分野の教授学的転置の過程が分析されてきた。例えば、中等学校の指導に関連するものでは、以下のようなものがある。初等代数 (Chevallard, 1985b; Kang, 1990; Coulange, 2001), 比例と量 (Bolea et al., 2001; Comin, 2002; Hersant, 2005), 幾何 (Tavignon, 1991; Chevallard & Jullien, 1991; Matheron, 1993; Bolea, 1995), 「非十進数」と無理数 (Assude, 1992; Bronner, 1997), 関数と解析 (Artigue, 1993, 1998, 2000; Ruiz Higuera, 1994, 1998; Chauvat, 1999; Amra, 2004; Barbé et al., 2005), 線形代数 (Ahmed & Arsac, 1998; Dorier, 2000; Gueudet, 2000), 算術 (Ravel, 2002), 論証 (Arsac, 1989; Cabassut, 2004), モデル化 (García, 2005), 統計 (Wozniak, 2005), 数学と経済 (Artaud, 1993, 1995), 数学と科学 (Arsac et al., 1994)。

これらの研究は、数学指導に関連するほとんどの現象が、主要構成要素として教授学的転置という特殊な現象を含むということを示している。その意味で、教授学的転置という現象はあらゆる教授学的問題のまさに核心にある、ということができる。それと同時に、これらの現象は数学の生産、使用、普及に関連する現象と切り離すことができない。したがって、学校の数学的活動は、次の数学教授学のより一般的な定義へとわれわれを導く、制度における数学的活動というより大きな問題と不可分に統合されるのである。「人々や人間の制度にとって役に立つ数学的な知識の総体に固有な（課されている）普及の条件についての科学」(Brousseau, 1994)。この定義は、教育にかかわる制度を越えて、どんな種類の

ものであれ数学的活動が生じるすべての制度を含むべく、教授学の領域を拡大する。

ギ・ブルソーは、教授学における認識論的分析の中心的役割から、数学教育が数学コミュニティに近いところに位置することの重要性を常に強調してきた。しかしながら、教授学の広げられた研究領域の中で発展していくためには、研究者は「教師」や「数学者」といった伝統的な考えの守護者の立場と縁を切らなければならない。新しい立場が必要なのである。「人間学的教授学」(Chevallard, 1992) という手段に訴えることは、この立場を構成する取り組みの必要性を浮き彫りにするであろう。

4. 貢献 2：数学的活動と教授活動の記述

1980 年から 1995 年までの間で、教授学的転置という現象の研究は、知識対象の制度的生態というより広い枠組みの中で、知識の対象や対象との関係という観点から策定された (Chevallard, 1992; Artaud, 1993, 1995)。物質的な次元を含めた数学的実践と、この実践と不可分なものとしての数学的な知識の総体をモデル化するための、よりきめ細かいツールの探求は、「教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic)」の枠の中で、数学プラクセオロジー(mathematical praxeology) や 数学構成 (mathematical organization) という概念を生み出した (Chevallard, 1999, 2002a, 2002b)。この理論は、数学的活動が他の形式の活動とともに通常の人間活動として解釈されねばならない、という主張を基盤にしており、そのため活動の理論的（知識）側面と実践的（ノウハウ）側面を等しく重要視し関連付ける、人間活動の一般的なモデル（プラクセオロジー）を提案する。Chevallard (2006) は以下のように述べる。

《一つのプラクセオロジーは、何らかの方法で、人間行為一般を分析することを可能

にする基本単位である。[...] 一つのプラクセオロロジーとは一体何か。ここでわれわれを案内してくれる語源に頼ろう。どんな人間の行ないも2つの主要な相互に関連する構成要素に分解することができる。一方はプラクシスつまり実践部分であり、もう一方はロゴスである。「ロゴス」は、人間の思考や推論—特に宇宙に関するもの—へ言及するために、前ソクラテス期より絶え間なく使用されてきたギリシャ語である。[...] ATD—教授人間学理論—の一つの基本原則に従えば、人間行為は、少なくとも部分的に「説明されたり」、「明確」化されたり、「正当化されたり」、「解説されたり」することなく存在しえない。それは、そうした説明や正当化がどのようなスタイルの「推論」でなされてもである。したがって、プラクシスはロゴスを必然的に伴い、そしてロゴスは今度はプラクシスをバックアップするのである。長い目でみれば、人間の行ないに問題にされないままにしているものはないために、プラクシスには支援が必要となる。勿論、プラクセオロロジーには、「プラクシス」部分が非効率的なテクニック—「テクニック」はここでは「やり方」を意味する公式用語である—からつくられていたり、ロゴス部分がほとんどでたらめであったりするような—少なくともプラクセオロロジー主義者の視点からすれば！—悪いものもあるだろう。》

制度的な教授過程を分析するより精密なツールを得るために、Chevallard (1999) は複雑さが徐々に増大する配列に数学プラクセオロロジーを分類した。1 種類の問題の周りに作り上げられる複数の「より単純な」プラクセオロロジー—点的数学構成—は、その理論的背景に応じてお互いに結び付けられうる。理論的背景は、数学の主題、区域、領域をそれぞれ覆う局所的プラクセオロロジー、域的プラクセ

オロロジー、大局的プラクセオロロジーを生み出す。プラクセオロロジーの観点からのモデル化は教授学的転置過程のすべてのステップを記述するために使用されうるので、教授学的転置過程の分析は新しい機能性を獲得する。すなわち、数学の専門書にでてくるような「公式の」学術的な知識の総体や、研究者によって日常業務の中で「活性化される」より非形式的な知識の総体から、教室で明示的に教えられている内容や、生徒のグループによって学ばれる、つまりそのグループにとって利用可能な、あまり明示的でない数学的知識までを記述できる。それは特に、「教えられるべきプラクセオロロジー」がもたらす、教師と生徒の実践に影響を与える厳しい制約を研究者が見出すことに導く基本認識論モデルを明確化するための、かなり便利なツールとなる。

例えばボレアは、モデル化のツールとしての代数の指導に作用する教授学的制約を記述しうる初等代数の独自の具体的なモデルを与えている (Bolea et al., 2004). García (2005) は、代数的モデル化と関数的モデル化の間の繋がりに達するまでこのモデルを拡張し、スペインのカリキュラムにおいて比例が孤立していることを示した (García & Ruiz, 2006). 二面性をもつプラクセオロロジーの観点からのかなりシンプルなモデルにより、スペインの高校教師が関数の極限を教える際に自ら判断して行動できる余地は極めて狭い、ということが示された (Barbé et al., 2005). プラクセオロロジーの観点からの教授学的転置過程のその他の分析は、次のような最近の博士論文の中にみられる。Cabassut (2004) は数学的そして社会的知識としての証明の指導における「ダブル転置」と彼が呼ぶものを分析している。Hersant (2005) は、フランスにおける比例指導の変遷を描き出し、量の学習に僅かな場所しか充てられていないことから比例指導を疑問視する。Ravel (2004) は、フランスの高校レベルでの算術の再導入が難しいことを研究

している。Amra (2004) は関数指導について、Rodríguez (2005) は問題解決とメタ認知技能の指導について、Wozniak (2005) は統計について研究している。

数学的知識がプラクセオロジーという語を用いて記述されうると述べてきた。では、数学の指導と学習、つまり教授過程それ自体についてはどうだろうか。実際、知識が決して確定的な構成物でないことと同様に、数学プラクセオロジーも突然現れたり、確定した形式を得たりしない。それらは複雑なダイナミクスを伴う複合的で進行中の活動の結果であり、今度はそれがモデル化されなければならない。数学的活動と密接に関連する2つの側面があるようである。それは、数学的構成の過程—学習(study)の過程—と、この構成の結果—数学プラクセオロジー—である。改めて、人間活動としてのこの学習の過程もまた、プラクセオロジーの観点からモデル化されることになる。それは教授プラクセオロジーと呼ばれる (Chevallard, 1999)。したがって、学習という概念は、異なる制度（生産制度、普及制度、使用制度、指導制度）において数学プラクセオロジーを組み立てることを目的とする教授プラクセオロジーを記述するためのまとまった領域を提供する。

ここでこれ以上述べないが、次のことだけは述べておきたい。数学教授学の新しい構想では、教授学が「学習する」と「学習を助ける」とに関連しうるどんなものをも含むということである。

《数学教授学は数学の学習と数学の学習の支援についての科学である。そのねらいは、数学を学習したり数学を学習する他者を援助したりする人々（生徒、教師、保護者、専門家など）が抱える困難性に対して、説明と確かな回答を与えるために、学習過程（あるいは教授過程）を記述し特徴付けることである。》(Chevallard, Bosch &

Gascón, 1997)

《プラクセオロジーという概念は、教授学の対象を完全に定式化することを可能にする。教授学は、人間のグループの中でプラクセオロジーが誕生、移住、変容、作用、死亡、消滅、再誕などをする際の条件と制約の研究に捧げられる。必然的に、教授学研究のフィールドはかなり拡大される。教授がいつあろうともどんな形態を採っていようとも、教授学は教授を研究するのである^{訳注3}。独自の対象を与えることで、教授学は、学校で確立されている教科領域により支配されている状態から、徐々に逃れることを望めよう。》(Chevallard, 2005)

「条件と制約」を「生態」に置き換えるなら、教授学の研究は、制度における数学プラクセオロジーと教授プラクセオロジーの生態の研究である、とより簡潔に述べることができる。Artaud (1993, 1995)によって数年前に示されたように、教授学的転置は、制度的転置の特殊な一形態、すなわち数学的知識の社会的普及の特殊な一形態として現れるのである。

5. 貢献3：様々な決定水準における制約

数学プラクセオロジーと教授プラクセオロジーの生態の研究は次のことを指摘する。教師と生徒が教えられるべき知識の周りで出会う際に起りうることは、教室の中で直ちに同定できるもの—教師と生徒の知識、利用可能な教具、ソフトウェア、一時的構成など—へは還元されえない条件と制約によって主に決定されている、ということである。たとえこれらの条件と制約が重要な役割を果たすにしても、シュバラルは近年、教室という狭い空間とその中で研究されるべき主体を越えたところにある条件を研究者が同定する助けとなろう「決定水準」の階級（図3）を提案した(Chevallard, 2002b, 2004)。

なぜ理論的枠組みを複雑にし、そのように

研究対象を新たに広げる必要があるのか。答えはいつも同じである。つまり、研究者が疑うことなしに前提にしかねない数学的知識の自生的な考えから自由になるためである。「点的」プラクセオロジー、「局所的」プラクセオロジー、「域的」プラクセオロジー、「大局的」プラクセオロジーは、題材、主題、区域、領域といった低い決定レベルに対応する。おそらく「教師の問題」(最も単純なものは次である。「生徒のグループへ教えられるべき数学的内容が与えられたとき、どのように教えるのがベストな方法なのか」)に近づきすぎていたために、研究者は、学術の制度や教育の制度によって与えられる特定の内容区分を、当然のものとししばしばみなしていた。なぜ数学的内容があればこれの特定の塊に分けられているのか。何がこの分割の規準で、それは教師と生徒の具体的な活動に対してどのような制約をもたらすのか。



図3. 決定水準の階級

数学という教科において、推論と証明の指導のために幾何へ与えられている高い価値、初等代数の軽視、そしてヨーロッパのいくつかの国々において「通常の」内容ブロックとしての統計の指導を導入する困難性は、より高い決定レベル（学校、社会、文明）に起源をもつ現象である。数学がそれ自体で完結していることや数学と他の教科の難しい関係はいうまでもないだろう。明らかにこれらは、非数学的对象の混じった数学プラクセオロジーの構成を必要とする、モデル化や統計、その他の実践の学習に抵抗する強い制約である（更なる論の展開は Wozniak (2005)を参照されたい）。

主たる問題は、どのような水準に由来するどのような制約が数学プラクセオロジーの生態にとって決定的になっているのか、を知ることである。本稿の冒頭で、数学的知識の記念碑化の過程について述べた。今日それは、数学教育を越えて、学校で教えられているほとんどすべての種類のプラクセオロジーに影響を与える本質的な転置現象としてまさに現れてくる。シュバラールのもっとも最近の取り組みでは (Chevallard, 2004, 2005, 2006), 知識の総体の存在理由と機能性を学習の核心に位置付ける新しい学校認識論の構築が提唱されている。

《従来の数学をある意味で責任ある数学へと変えるようなアップデート [が必要である]。それは、若い世代に対し、学校は自分たちを見捨てるのではなく、反対に、自分たちの周りの世界について考え、知識と理性を備えてその世界へ踏み入れるために必要なツールを与えることに大いに関心がある、ということをはっきりと示すような数学である。》(Chevallard, 2004)

決定水準の階級は、理論の最初の定式化の発端となった教授現象についての研究領域に新たな地平を拓く。25年前、シュバラールの

仕事は、教授学的転置の過程とこの過程が学校の数学的内容を構成する具体的な方法に由来する制約を考慮に入れるよう促した。すなわち、教科や内容のブロックへの分割から、決定レベルの下層にあたる一連の題材までの制約をである。いま、学校を通して社会が教科の学習を組織する方法に由来する制約を考察するという、更なるステップが必要のようである。それは、より一般的にわれわれの社会が教科や「学習活動」に割り当てる地位や機能にかかわる。この最後の発展は、教育と学習についての共通認識の再検討を可能にし、Kang & Kilpatrick (1992, p. 2) が初期の転置理論の中で主張しえた「もう一つの認識論」の確立を可能にするように思う。

《もし学校数学におけるほとんどの知識が、われわれの価値観や教育目的、数学的技能などとあわさった、観察に適合する知識の合成物であるとすれば、もう一つの認識論が必要であろう。[...] 構成主義の立場を犯すことなしに、少なくとも、認識主体の外側に独立して知識が存在している「かのように」知識を扱うことを可能にする認識論を、われわれは構築することができるだろうか。肯定的な回答を与えてくれる一つの認識論モデルが、シュバラールの教授学的転置理論にみいだされうる。》

引用・参考文献

- Ahmed, B., Arsac, G.: 1998, 'La conception d'un cours d'algèbre linéaire.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/3, 333-386.
- Amra, N.: 2004, *La transposition didactique du concept de fonction. Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien*. Doctoral dissertation, Université Paris 7.
- Arsac, G.: 1989, 'Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9/3, 247-280.
- Arsac, G.: 1992, 'The evolution of a theory in didactics: the example of didactic transposition.' In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics. Selected Papers*. La Pensée Sauvage, Grenoble (pp. 107-130).
- Arsac, G., Chevallard, Y., Martinand, J. L., Tiberghien, A., Balacheff, N.: 1994, *La transposition didactique à l'épreuve*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Artaud, M.: 1993, *La mathématisation en économie comme problème didactique. Une étude de cas*. Doctoral dissertation, Université d'Aix-Marseille II.
- Artaud, M.: 1995, 'La mathématisation en économie comme problème didactique. La communauté des producteurs de sciences économiques : une communauté d'étude.' In Margolinas, C. (eds.) *Les débats de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble (pp. 113-129).
- Artigue, M.: 1993, 'Enseignement de l'analyse et fonctions de référence.' *Repères* 11, 115-139.
- Artigue, M.: 1998, 'L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18/2, 231-261.
- Artigue, M.: 2000, 'Teaching and learning calculus: What can be learnt from education research and curricular changes in France?' *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 1-15, A.M.S.
- Assude, T.: 1992, *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Écologie de l'objet "racine carrée" et analyse du curriculum*. Doctoral dissertation, Université de Grenoble I.

- Astolfi, J. P., Develay, M.: 1989, *La didactique des sciences*. PUF, Paris.
- Barbé, Q., Bosch, M., Espinoza, L., Gascón, J.: 2005, 'Didactic restrictions on the teacher's practice. The case of limits of functions.' *Educational Studies in Mathematics* 59, 235-268.
- Bolea, P.: 1995, 'La transposición didáctica de la geometría elemental.' In: *Educación abierta: aspectos didácticos de matemáticas* 5, I.C.E. de la Universidad de Zaragoza (pp. 89-126).
- Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J.: 2001, 'La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, 247-304.
- Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J.: 2004, 'Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school?' *Quaderni di Ricerca in Didattica* 14, 125-133.
- Bosch, M., Gascón, J.: 2005: 'La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques.' In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble (107-122).
- Bronner, A.: 1997, *Étude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Doctoral dissertation, Université de Grenoble I.
- Brousseau, G.: 1980, 'Problèmes de l'enseignement des décimaux.' *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1/1, 11-59.
- Brousseau, G. (1994): 'Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques.' Text of a lecture presented at the 8th ICMI Study: *What is Research in Mathematics Education and What are its Results?* University of Maryland, College Park, MD, May 1994. (Unpublished manuscript)
- Brousseau, G.: 1997a, *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques* 1970-1990. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Brousseau, G.: 1997b, 'La théorie des situations didactiques.' Lecture *Doctorat honoris causa* at Université de Montréal. <http://perso.orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#publications>.
- Brousseau, G.: 2000. 'Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire.' *Second Colloque de Didactique des mathématiques* (Réthymnon, Crète, Grèce), 67-83. <http://perso.orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm#publications>.
- Brousseau, G.: 2005. 'Réponses écrites.' In Salin, M.-H., Clanché, P., Sarrazy, B. (eds.) *Sur la Théorie des Situations Didactiques* (pp. 48-80). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cabassut, R.: 2004, 'Argumenter ou démontrer: continuité ou rupture didactique? Les effets d'un double transposition.' *Annales de didactique et de sciences cognitives* 9, 153-174.
- Chevallard, Y.: 1985a, *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2nd edition 1991).
- Chevallard, Y.: 1985b, 'Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique.' *Petit x* 5, 51-94.
- Chevallard, Y.: 1992, 'Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach.' In R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 131-167.
- Chevallard, Y.: 1999, 'L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du

- didactique.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-266.
- Chevallard, Y. : 2002a, ‘Organiser l’étude 1. Structures et fonctions.’ In Dorier J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11e École d’Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y.: 2002b, ‘Organiser l’étude. 3. Écologie & régulation.’ In Dorier, J.-L. *et al.* (eds) *Actes de la 11e École d’Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y.: 2004, ‘La place des mathématiques vivantes dans l’éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire.’ *3e Université d’été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004, APMEP (pp. 239-263).
- Chevallard, Y.: 2005, ‘La didactique dans la cité avec les autres sciences.’ *Symposium de Didactique Comparée*, Montpellier 15-16 septembre 2005.
- Chevallard, Y.: 2006, ‘Steps towards a new epistemology in mathematics education.’ In Bosch, M. (eds) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (to appear).
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J.: 1997, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.
- Chevallard, Y., Jullien, M.: 1991, ‘Autour de l’enseignement de la géométrie au collège.’ *Petit x* 27, 41-76.
- Chauvat, A.: 1999, ‘Courbes et fonctions au Collège.’ *Petit x* 51, 23-44.
- Comin, E.: 2002, ‘L’enseignement de la proportionnalité à l’école et au collège.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22/2.3, 135-182.
- Conne, F.: 2004, ‘Problèmes de transposition didactique.’ *Petit x* 65, 62-41.
- Coulange, L.: 2001, ‘Enseigner les systèmes d’équations en Troisième. Une étude économique et écologique.’ *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, 305-353.
- Dorier, J. L.: 2000, ‘Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l’algèbre linéaire.’ *Les cahiers du laboratoire Leibniz* 12.
<http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2000.html>.
- García, J.: 2005, *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Doctoral dissertation, Universidad de Jaén.
- García, J., Ruiz, L.: 2006, ‘Mathematical praxeologies of increasing complexity: variation systems modelling in secondary education.’ *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, (to appear).
- Gascón, J.: 2003, ‘From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes?’ *For the Learning of Mathematics* 23/2, 44-55.
- Gueudet, G.: 2000, *Rôle du géométrique dans l’enseignement et l’apprentissage de l’algèbre linéaire*. Doctoral dissertation, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Hersant, M.: 2005, ‘La proportionnalité dans l’enseignement obligatoire en France, d’hier à aujourd’hui.’ *Repères* 59, 5-41.

- Kang, W.: 1990, *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbooks*. Doctoral dissertation, University of Georgia.
- Kang, W. & Kilpatrick, J.: 1992, 'Didactic transposition in mathematics textbooks.' *For the Learning of Mathematics* 12(1), 2-7.
- Matheron, Y.: 1993, *Une étude de la transposition didactique du Théorème de Thalès entre 1964 et 1989*. Doctoral dissertation, Université d'Aix-Marseille.
- Ravel, L.: 2002, 'Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques: Quel(s) enseignement(s)?' *Repères* 49, 96-116.
- Rodriguez, E.: 2005, *Metacognición, matemáticas y resolución de problemas: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid.
- Ruiz Higuera, L.: 1994, *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Doctoral dissertation, Universidad de Jaén.
- Ruiz Higuera, L.: 1998, *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Jaén.
- Tavignot, P.: 1991, *L'analyse du processus de transposition didactique. Exemple de la symétrie orthogonale au collège*. Doctoral dissertation, Université Paris V.
- Wozniak, F.: 2005, *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Doctoral dissertation, Université Claude Bernard Lyon 1.

訳注とそれにかかわる参考文献

訳注 1) 原語は'institution'である。ここでは「制度」と訳したが、ATD では、'institution' は、図 2 に見られる数学コミュニティや教育システム、教室を始め、ノースフェール、

家族など、知識に対し特定の関係がみられる共同体のようなものを意味し、知識は 'institution' なく存在しえないとする。宮川 (2011) は「知的集合体」と訳出している。訳注 2) ここでは、「自生的」は「科学的」の対義語として用いられている。

訳注 3) 原文では '*the didactics studies the didactic*' であり、2 つの 'the' が強調されている。ここでの定冠詞の使い方はいずれも総称用法であり、教授学という学問領域はより広く、その研究対象はより多い、ということ強調している。

宮川健 (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の『学』としての性格：わが国における『学』としての数学教育研究をめざして」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 94, 37-68.

謝辞

著者のボスク先生とガスコン先生には、論文の翻訳掲載をご快諾いただき、心よりお礼を申し上げます。今回の翻訳プロジェクトは約一年前から計画しておりましたが、それが現実味を帯びたのは、本年度 10 月のボスク先生の来日の際に、先生と訳者らの何気ないやり取りの中で翻訳の話題がでたときです。その意味で、特にボスク先生には特別な感謝の意を表したいと思います。

加えて、袴田綾斗氏（広島大学附属中学校教諭）へもお礼を述べたいと思います。今回の訳文は、大滝の予備的な翻訳をベースにしつつ、それに大滝と宮川によって全面的な改訂を施したものです。予備翻訳の段階において、袴田氏には、訳文のチェックや内容の解釈に関する議論にお付き合いいただきました。ありがとうございました。

（大滝孝治・宮川健）